线性代数　中国科学技术大学 2023 春
线性映射

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

矩阵的相似对角化及其判定准则

定义 (可对角化)

相似于对角矩阵的方阵称为可对角化的. 我们称一个线性变换为可对角化的, 若它在某组基下的矩阵可对角化.

定理 (利用特征向量来判定)

方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

推论 (利用特征值来判定)

若 n 阶方阵有 n 个两两不同的特征值, 则 A 可对角化.

定理 (利用特征值的重数来判定)

1. $1 \leq$ 几何重数 $\leq$ 代数重数.
2. A 可对角化 $\Leftrightarrow$ 每个特征值的几何重数与代数重数相等.

定理 (哈密尔顿-凯莱定理)

$P_A(A) = 0.$

特别地, 任意方阵 A 都存在零化多项式. 称次数最小的首一零化多项式为 A 的极小多项式. (注: 极小多项式为相似不变量.)

性质

1. 极小多项式整除其他任意零化多项式. 特别地, 极小多项式为特征多项式的因子.
2. 一个数为特征值当且仅当其为极小多项式的根.

定理 (利用极小多项式)

方阵可对角化当且仅当其极小多项式无重根.

推论 (利用零化多项式)

方阵可对角化当且仅当其存在无重根的零化多项式.

例: 设方阵 A 满足 $A^2 = A, A^2 = I$ 或 $A^3 = A$ 等. 则 A 可对角化.

不是每个矩阵都可以对角化, 但总是可上三角化!

定理

1. 任意 n 阶复方阵 A 都相似于一个上三角形矩阵 J, 且
2. J 的对角线上的元素为 A 的全体特征值.

证明思路: 将 A 的一个特征向量 ξ_1 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$, 并记组成的可逆矩阵 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 为 P. 则

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda & * \\ & A_{22} \end{pmatrix}.$$

对矩阵阶数归纳, 不妨设 $A_{22} = Q\begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}Q^{-1}$. 则

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & \\ & Q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \left(P\begin{pmatrix} 1 & \\ & Q \end{pmatrix}\right)^{-1}.$$

注: J 的取法不唯一.(例: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.)

例: 若复二阶矩阵 A 满足 $A^2 = 0$, 则 $A = 0$ 或者 A 相似于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

相似等价类中的最简代表元是什么? 为了回答这一问题, 我们需要引进:

定义 (若当块, 若当矩阵)

1. 给定任意正整数 m 和复数 λ. 称矩阵 $J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ 为若当块.
2. 称由若当块组成的对角分块矩阵
$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$
为若当矩阵.

相似等价类中的最简代表元(若当标准形)*

定理

1. 任意复方阵都与某若当矩阵相似, 并且
2. 不计若当块排序下, 这个若当矩阵取法唯一. 称之为给矩阵的若当标准形

例

设 λ 为 5 阶复矩阵 A 的 5 重特征值. 请分析 A 的若当标准形.

例

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ 的若当标准形.